

# 三角形の五心

製作：赤門会 (<http://www.akamon-kai.co.jp/>)

contents : <http://www.akamon-kai.co.jp/yomimono/yomimono.htm>



(注意) 以下では、次の定理を証明済みとします。

- ・直線、円に関する基本的な定理  
2直線が交わるときの対頂角に関する定理、円周角の定理、円周角の定理の逆など。
- ・平行線、三角形に関する基本的な性質  
三角形の内角の和に関する定理や、平行線の錯角、同位角に関する定理など。
- ・三角形の合同、相似に関する諸定理  
いわゆる三角形の合同条件、三角形の相似条件。中点連結定理、二等辺三角形の性質など。
- ・特殊な四角形に関する定理  
平行四辺形に関する定理、ひし形、長方形に関する定理など。
- ・三角形の面積、および、面積比に関する定理。

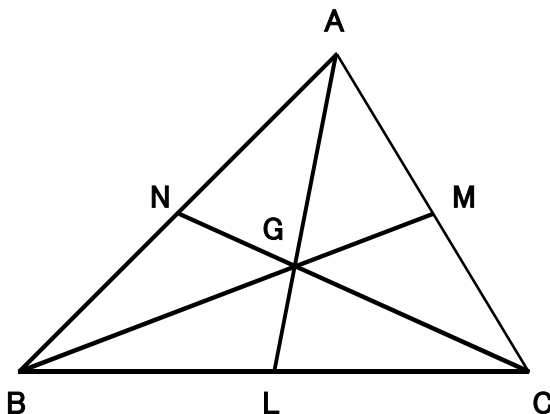
## 三角形の五心

三角形の五心とは、重心、外心、内心、垂心、傍心（ぼうしんのぼうは本来きへんです）のことです。

### ・重心

三角形の辺と向かい側の頂点を結ぶ直線を中線といいます。三角形の三本の中線は一点で交わります。これを三角形の重心といいます。

### ・重心の存在定理



三角形 ABC の辺 CA、辺 AB の中点を、それぞれ、M、N とします。直線 BM と直線 CN の交点を G とし、直線 AG と直線 BC の交点を L とします。この L が辺 BC の中点であることを示せば、3本の中線が1点 G で交わったこととなります。以下でこれを示します。

(証明)

M が辺 CA の中点であるから

$$\triangle ABG = \triangle BCG \quad \dots(1)$$

N が辺 AB の中点であるから

$$\triangle CAG = \triangle BCG \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$\triangle ABG = \triangle CAG \quad \dots(3)$$

したがって、L は辺 BC の中点である。

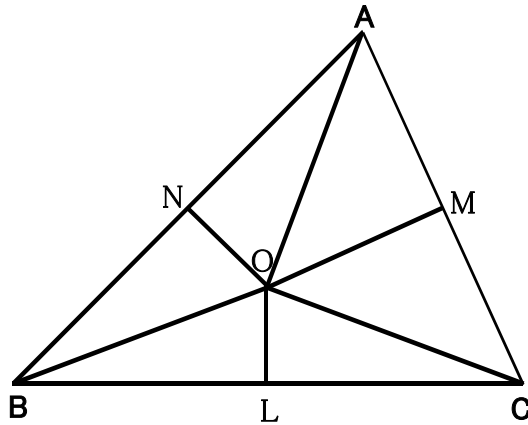
(証明おわり)

・外心

三角形の3辺の垂直二等分線の交点を外心といいます。

・外心の存在定理

三角形 ABC の辺 CA の中点を M、辺 AB の中点を N とし、辺 CA の垂直二等分線と、辺 AB の垂直二等分線との交点を O とします。また、辺 BC の中点を L とします。OL と BC が垂直であることを示せば3辺の垂直二等分線が点 O で交わったこととなります。以下ではこれを示します。



(証明)

三角形 ACO において、OM は辺 AC の垂直二等分線であるから、

$$AM = CM$$

$$OM \perp AM$$

したがって、

$$OA = OC \quad \dots(1)$$

同様に、

$$OA = OB \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$OB = OC \quad \dots(3)$$

三角形 BCO において、(3)より

$$OB = OC$$

L は辺 BC の中点であるから、

$$BL=CL$$

したがって、

$$OL\perp BC$$

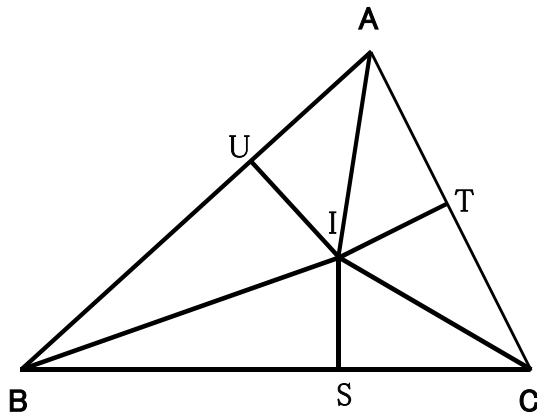
(証明おわり)

・内心

三角形の三つの内角の二等分線の交点を内心といいます。

・内心の存在定理

三角形 ABC の角 B の二等分線と角 C との二等分線との交点を I とします。直線 AI が角 A の二等分線であることを示せば三つの角の二等分線が点 I で交わったことになります。以下ではこれを示します。



(証明)

I から BC、CA、AB に下ろした垂線の足を、それぞれ、S、T、U とする。三角形 CIS と三角形 CIT において

$$\angle ICS = \angle ICT$$

$$\angle ISC = \angle ITC = 90^\circ$$

$$IC = IC$$

であるから、

$$\triangle CIS \cong \triangle CIT$$

ゆえに、

$$IS = IT \quad \dots(1)$$

同様に、

$$IS = IU \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$IT = IU \quad \dots(3)$$

三角形 AIT と三角形 AIU において、(3)より

$$IT = IU$$

さらに、

$$\angle ITA = \angle IUA = 90^\circ$$

$$IA = IA$$

したがって、

$$\triangle AIT \equiv \triangle AIU$$

ゆえに、

$$\angle IAT = \angle IAU$$

すなわち、AI は  $\angle BAC$  の二等分線である。

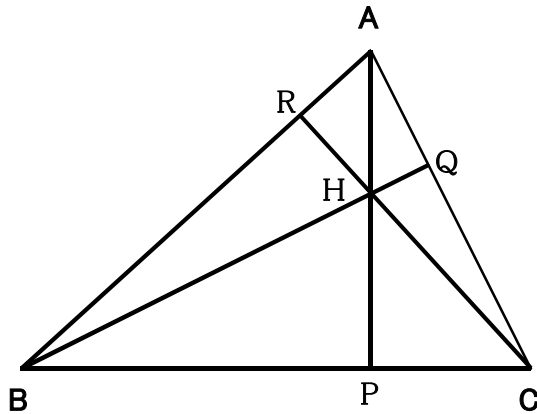
(証明おわり)

・垂心

三角形の各頂点から対辺に下ろした垂線を下します。この3本の垂線の交点を垂心といいます。

・垂心の存在定理

三角形 ABC において、頂点 B、C から CA、AB に下ろした垂線の足を、それぞれ、Q、R とし、直線 BQ と CR の交点を H とします。さらに、直線 AH と直線 BC の交点を P とします。AP と BC が垂直であることを示せば、三本の垂線が一点で交わったことになります。以下ではこれを証明します。



(証明)

$\angle BQC$  と  $\angle BRC$  はともに直角であるから、次の二つのことが成り立つ。

A、R、H、Q は同一円周上にある。 …(1)

B、C、Q、R は同一円周上にある。 …(2)

(1)より

$$\angle RAH = \angle RQH \quad \dots(3)$$

(2)より

$$\angle RQB = \angle RCB \quad \dots(4)$$

(3)(4)より

$$\angle RAH = \angle RCB$$

したがって、4点 A、R、P、C は同一円周上にあるから、

$$\angle APC = \angle ARH$$

ゆえに、

$$AP \perp BC$$

(注) 上の図は三角形 ABC が鋭角三角形の場合であるが、鈍角三角形の場合の証明もほぼ同様である。

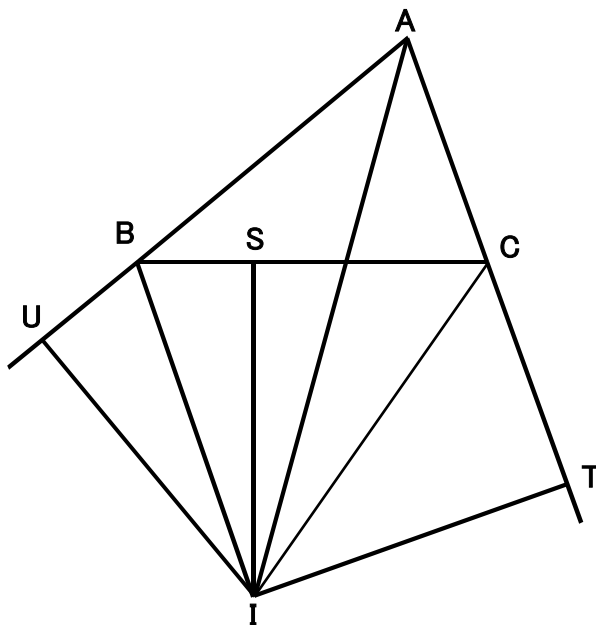
(証明おわり)

・ 傍心

三角形の二つの角の外角の二等分線と残りの一つの角の内角の二等分線との交点を傍心といいます。どの角の内角をとるかによって異なる交点が得られるので、ひとつの三角形には傍心が3個あります。

・ 傍心の存在定理

三角形 ABC の角 B、角 C の外角の二等分線の交点を I とします。直線 AI が角 A の内角の二等分線であることを示せば三つの角の二等分線が点 I で交わったことになります。以下ではこれを示します。他の2個の傍心についても同様ですので、これらについては省略します。



(証明)

I から BC、CA、AB に下ろした垂線の足を、それぞれ、S、T、U とする。三角形 CIS と三角形 CIT において

$$\angle ICS = \angle ICT$$

$$\angle ISC = \angle ITC = 90^\circ$$

$$IC = IC$$

であるから、

$$\triangle CIS \equiv \triangle CIT$$

ゆえに、

$$IS = IT \quad \dots(1)$$

同様に、

$$IS = IU \quad \dots(2)$$

(1)(2)より

$$IT=IU \quad \dots(3)$$

三角形 AIT と AIU において、(3)より

$$IT=IU$$

さらに、

$$\angle ITA = \angle IUA = 90^\circ$$

$$IA=IA$$

したがって、

$$\triangle AIT \equiv \triangle AIU$$

ゆえに、

$$\angle IAT = \angle IAU$$

すなわち、AI は  $\angle BAC$  の二等分線である。

(証明おわり)

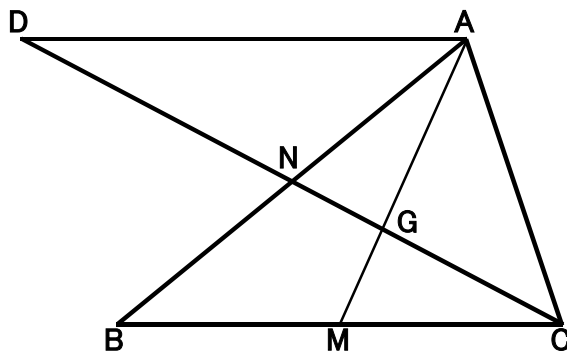
### 三角形の五心の性質・相互関係

- ・ 重心に関する定理

[定理]

三角形の重心は各中線を 2 : 1 の比に分ける。

[証明]



三角形 ABC の重心を G とし、線分 BC、AB の中点を M、N とする。線分 CN の N の側の延長上に

$$CN=DN$$

を満たす点 D をとる。四角形 AD BC は 2 本の対角線が互いに他を二等分するので、平行四辺形である。したがって、

$$AD // CB$$

$$AD = BC$$

ゆえに、

$$AD // MC$$

$$AD : MC = 2 : 1$$

したがって、

$$\triangle ADG \sim \triangle MCG$$

であり、

$$AG : MG = 2 : 1$$

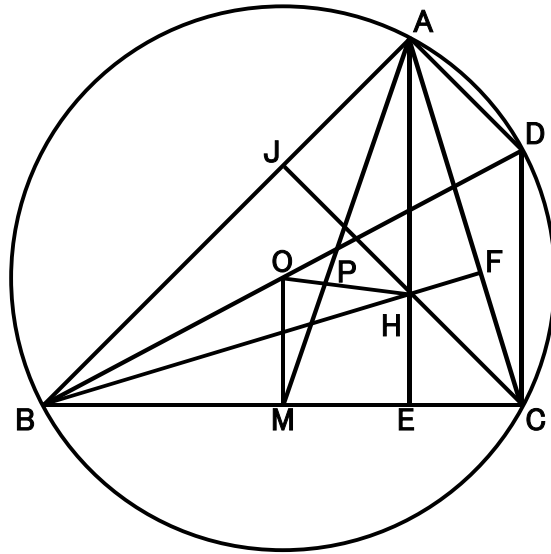
[証明おわり]

・ 外心、重心、垂心の相互関係

[定理]

三角形 ABC の外心、重心、垂心を O、G、H とする。3点 O、G、H は同一直線上にあり、G は線分 OH を 1 : 2 に内分する。

[証明]



三角形 ABC の外心、重心、垂心を O、G、H とする。BC の中点を M、BO の O の側の延長と三角形 ABC の外接円との交点を D、AH と BC の交点を E、BH と AC の交点を F、CH と AB の交点を J、AM と OH との交点を P とする。

H は垂心であるから、

$$AE \perp BC \quad \dots(1)$$

$$BF \perp AC \quad \dots(2)$$

$$CJ \perp AB \quad \dots(3)$$

四角形 ABCD は内接四角形であるから、

$$\angle DAC = \angle DBC \quad \dots(4)$$

$\triangle DBC$  と  $\triangle ABF$  において

$$\angle BDC = \angle BAF, \angle DCB = \angle AFB$$

より、

$$\angle DBC = \angle ABF \quad \dots(5)$$

(2)(3)より四角形 BCFJ は内接四角形であるから、

$$\angle ABF = \angle ACH \quad \dots(6)$$

(4)(5)(6)より、

$$\angle DAC = \angle ACH$$

ゆえに、

$$AD \parallel CH \quad \dots(7)$$

O が三角形 ABC の外心、M が辺 BC の中点だから、

$$OM \perp BC \quad \dots(8)$$

$$BM : BC = 1 : 2 \quad \dots(9)$$

BD が外接円 O の直径だから、

$$BC \perp CD \quad \dots(10)$$

(8)(10)より、

$$OM \parallel CD \quad \dots(11)$$

(11)より

$$\triangle BOM \sim \triangle BDC$$

である。これと(9)より、

$$OM : DC = 1 : 2 \quad \dots(12)$$

(7)(11)より四角形 AHCD は平行四辺形であるから、

$$AH = CD \quad \dots(13)$$

(12)(13)より、

$$OM : HA = 1 : 2 \quad \dots(14)$$

(1)(8)より

$$OM \parallel HA \quad \dots(15)$$

(15)より

$$\triangle OMP \sim \triangle HAP \quad \dots(16)$$

(14)(16)より

$$MP : AP = 1 : 2$$

すなわち、P は中線 AM を 2 : 1 の比に分ける点であり、三角形 ABC の重心 G と一致する。

$$P = G \quad \dots(17)$$

(14)(16)より

$$OP : HP = 1 : 2 \quad \dots(18)$$

(17)(18)より

$$OG : HG = 1 : 2$$

したがって、O、G、H はこの順に同一直線上にあり、

$$OG : GH = 1 : 2$$

が成り立つ。

(注) 上の図および証明は、三角形 ABC が鋭角三角形の場合のものであるが、鈍角三角形の場合も同様にして証明できる。

[証明おわり]

製作：赤門会 (<http://www.akamon-kai.co.jp/>)

contents : よみもの (<http://www.akamon-kai.co.jp/yomimono/yomimono.html>)

上記の「よみもの」のページには、他にも数学関連の読み物があります。

是非ご覧ください。