

# 転載不可\_赤門会

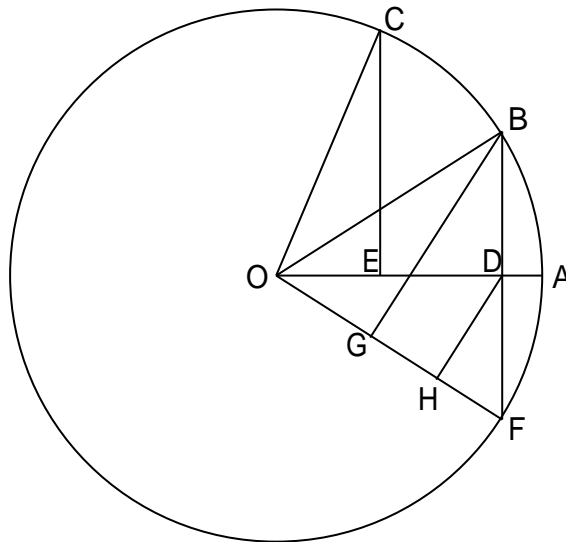
証明のための準備

[ 命題 1 ]

点Oを中心とし、半径が1の円周上に3点A、B、Cがあるとす。点B、Cから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれD、Eとする。D、Eが線分OA上にあり、 $OE = 2OD^2 - 1$ が成り立つとき、

$$\angle AOC = 2\angle AOB$$

が成り立つ。



(証明)

直線OAに関して点Bと対称な点をFとする。直線OFに点B、Dから下ろした垂線の足をG、Hとする。点Bが円Oの周上にあることと点Fの取り方より、

$$OB = OF = 1 \quad \dots(a.1.1)$$

$$BD = FD \quad \dots(a.1.2)$$

$$\angle AOB = \angle AOF \quad \dots(a.1.3)$$

点G、点Hの取り方より、

$$\angle BGO = 90^\circ \quad \dots(a.1.4)$$

$$\angle DHO = 90^\circ \quad \dots(a.1.5)$$

(a.1.4)(a.1.5)より

$$BG \parallel DH \quad \dots(a.1.6)$$

(a.1.2)(a.1.6)より

$$GH = HF \quad \dots(a.1.7)$$

点Dの取り方より

$$\angle BDO = 90^\circ \quad \dots(a.1.8)$$

(a.1.5)(a.1.8)より

$$\angle DHO = \angle BDO \quad \dots(a.1.9)$$

(a.1.3)より

$$\angle DOB = \angle HOD \quad \dots(a.1.10)$$

転載不可\_赤門会

# 転載不可\_\_赤門会

(a.1.9)(a.1.10)より

$$DOB \quad HOD \quad \dots(a.1.11)$$

(a.1.11)より

$$OB:OD = OD:OH \quad \dots(a.1.12)$$

(a.1.12)より

$$OD^2 = OB \cdot OH \quad \dots(a.1.13)$$

(a.1.1)(a.1.13)より

$$OH = OD^2 \quad \dots(a.1.14)$$

O、G、H、Fの位置関係により

$$GH = OH - OG \quad \dots(a.1.15)$$

$$FH = OF - OH \quad \dots(a.1.16)$$

(a.1.7)(a.1.15)(a.1.16)より

$$OH - OG = OF - OH \quad \dots(a.1.17)$$

(a.1.17)より

$$OG = 2OH - OF \quad \dots(a.1.18)$$

(a.1.1)(a.1.14)(a.1.18)より

$$OG = 2OD^2 - 1 \quad \dots(a.1.19)$$

仮定より

$$OE = 2OD^2 - 1 \quad \dots(a.1.20)$$

(a.1.19)(a.1.20)より

$$OG = OE \quad \dots(a.1.21)$$

点Cは円Oの周上にあるから、

$$OC = 1 \quad \dots(a.1.22)$$

(a.1.1)(a.1.22)より

$$OB = OC \quad \dots(a.1.23)$$

点Eの取り方により

$$\angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.1.24)$$

(a.1.4)(a.1.24)より

$$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.1.25)$$

(a.1.21)(a.1.23)(a.1.25)より

$$BGO \quad CEO \quad \dots(a.1.26)$$

(a.1.26)より

$$\angle GOB = \angle EOC \quad \dots(a.1.27)$$

(a.1.3)より

$$\angle GOB = 2\angle DOB \quad \dots(a.1.28)$$

(a.1.27)(a.1.28)より

$$\angle EOC = 2\angle DOB \quad \dots(a.1.29)$$

(a.1.29)より

転載不可\_\_赤門会

# 転載不可\_赤門会

$$\angle AOC = 2\angle AOB$$

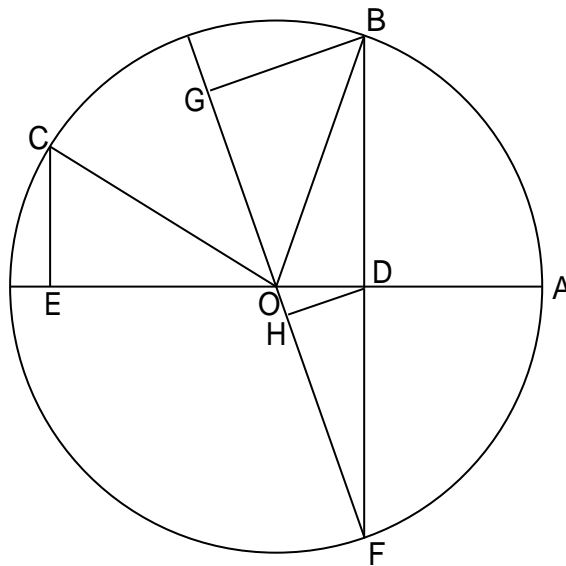
(証明終わり)

[ 命題 2 ]

点Oを中心とし、半径が1の円周上に3点A、B、Cがあるとする。点B、Cから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれD、Eとする。Dが線分OA上にあり、Eが線分OAのOの側の延長上にあるとき、 $OE = 1 - 2OD^2$ が成り立つとき、

$$\angle AOC = 2\angle AOB$$

が成り立つ。



(証明)

直線OAに関して点Bと対称な点をFとする。直線OFに点B、Dから下ろした垂線の足をそれぞれG、Hとする。点Bが円Oの周上にあることと点Fの取り方より、

$$OB = OF = 1 \quad \dots(a.2.1)$$

$$BD = FD \quad \dots(a.2.2)$$

$$\angle AOB = \angle AOF \quad \dots(a.2.3)$$

点G、点Hの取り方より、

$$\angle BGO = 90^\circ \quad \dots(a.2.4)$$

$$\angle DHO = 90^\circ \quad \dots(a.2.5)$$

(a.2.4)(a.2.5)より

$$BG \parallel DH \quad \dots(a.2.6)$$

(a.2.2)(a.2.6)より

$$GH = HF \quad \dots(a.2.7)$$

点Dの取り方より

$$\angle BDO = 90^\circ \quad \dots(a.2.8)$$

(a.2.5)(a.2.8)より

$$\angle DHO = \angle BDO \quad \dots(a.2.9)$$

転載不可\_赤門会

# 転載不可\_\_赤門会

(a.2.3)より

$$\angle DOB = \angle HOD \quad \dots(a.2.10)$$

(a.2.9)(a.2.10)より

$$DOB \quad HOD \quad \dots(a.2.11)$$

(a.2.11)より

$$OB : OD = OD : OH \quad \dots(a.2.12)$$

(a.2.12)より

$$OD^2 = OB \cdot OH \quad \dots(a.2.13)$$

(a.2.1)(a.2.13)より

$$OH = OD^2 \quad \dots(a.2.14)$$

O、G、H、Fの位置関係により

$$GH = OH + OG \quad \dots(a.2.15)$$

$$FH = OF - OH \quad \dots(a.2.16)$$

(a.2.7)(a.2.15)(a.2.16)より

$$OH + OG = OF - OH \quad \dots(a.2.17)$$

(a.2.17)より

$$OG = OF - 2OH \quad \dots(a.2.18)$$

(a.2.1)(a.2.14)(a.2.18)より

$$OG = 1 - 2OD^2 \quad \dots(a.2.19)$$

仮定より

$$OE = 1 - 2OD^2 \quad \dots(a.2.20)$$

(a.2.19)(a.2.20)より

$$OG = OE \quad \dots(a.2.21)$$

点Cは円Oの周上にあるから、

$$OC = 1 \quad \dots(a.2.22)$$

(a.2.1)(a.2.22)より

$$OB = OC \quad \dots(a.2.23)$$

点Eの取り方により

$$\angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.2.24)$$

(a.2.4)(a.2.24)より

$$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.2.25)$$

(a.2.21)(a.2.23)(a.2.25)より

$$BGO \quad CEO \quad \dots(a.2.26)$$

(a.2.26)より

$$\angle GOB = \angle EOC \quad \dots(a.2.27)$$

(a.2.3)より

$$\angle BOF = 2\angle DOB \quad \dots(a.2.28)$$

F、O、Gはこの順に同一直線上にあるから、

転載不可\_\_赤門会



# 転載不可\_\_赤門会

直線OAに関して点Bと対称な点をFとする。直線OFに点B、Dから下ろした垂線の足をそれぞれG、Hとする。点Bが円Oの周上有ることと点Fの取り方より、

$$OB = OF = 1 \quad \dots(a.3.1)$$

$$BD = FD \quad \dots(a.3.2)$$

$$\angle DOB = \angle DOF \quad \dots(a.3.3)$$

点G、点Hの取り方より、

$$\angle BGO = 90^\circ \quad \dots(a.3.4)$$

$$\angle DHO = 90^\circ \quad \dots(a.3.5)$$

(a.3.4)(a.3.5)より

$$BG \parallel DH \quad \dots(a.3.6)$$

(a.3.2)(a.3.6)より

$$GH = HF \quad \dots(a.3.7)$$

点Dの取り方より

$$\angle BDO = 90^\circ \quad \dots(a.3.8)$$

(a.3.5)(a.3.8)より

$$\angle DHO = \angle BDO \quad \dots(a.3.9)$$

(a.3.3)より

$$\angle DOB = \angle HOD \quad \dots(a.3.10)$$

(a.3.9)(a.3.10)より

$$DOB = HOD \quad \dots(a.3.11)$$

(a.3.11)より

$$OB : OD = OD : OH \quad \dots(a.3.12)$$

(a.3.12)より

$$OD^2 = OB \cdot OH \quad \dots(a.3.13)$$

(a.3.1)(a.3.13)より

$$OH = OD^2 \quad \dots(a.3.14)$$

O、G、H、Fの位置関係により

$$GH = OH + OG \quad \dots(a.3.15)$$

$$FH = OF - OH \quad \dots(a.3.16)$$

(a.3.7)(a.3.15)(a.3.16)より

$$OH + OG = OF - OH \quad \dots(a.3.17)$$

(a.3.17)より

$$OG = OF - 2OH \quad \dots(a.3.18)$$

(a.3.1)(a.3.14)(a.3.18)より

$$OG = 1 - 2OD^2 \quad \dots(a.3.19)$$

仮定より

$$OE = 1 - 2OD^2 \quad \dots(a.3.20)$$

(a.3.19)(a.3.20)より

転載不可\_\_赤門会

# 転載不可\_\_赤門会

$$OG = OE \quad \dots(a.3.21)$$

点Cは円Oの周上にあるから、

$$OC = 1 \quad \dots(a.3.22)$$

(a.3.1)(a.3.22)より

$$OB = OC \quad \dots(a.3.23)$$

点Eの取り方により

$$\angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.3.24)$$

(a.3.4)(a.3.24)より

$$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.3.25)$$

(a.3.21)(a.3.23)(a.3.25)より

$$\triangle BGO \sim \triangle CEO \quad \dots(a.3.26)$$

(a.3.26)より

$$\angle GOB = \angle EOC \quad \dots(a.3.27)$$

(a.3.3)より

$$\angle BOF = 2\angle DOB \quad \dots(a.3.28)$$

F、O、Gはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle GOB = 180^\circ - \angle BOF \quad \dots(a.3.29)$$

(a.3.28)(a.3.29)より

$$\angle GOB = 180^\circ - 2\angle DOB \quad \dots(a.3.30)$$

(a.3.27)(a.3.30)より

$$\angle EOC = 180^\circ - 2\angle DOB \quad \dots(a.3.31)$$

A、O、Eはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle DOB = 180^\circ - \angle AOB \quad \dots(a.3.32)$$

(a.3.31)(a.3.32)より

$$\angle EOC = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle AOB) \quad \dots(a.3.33)$$

(a.3.33)より

$$\angle EOC + 180^\circ = 2\angle AOB$$

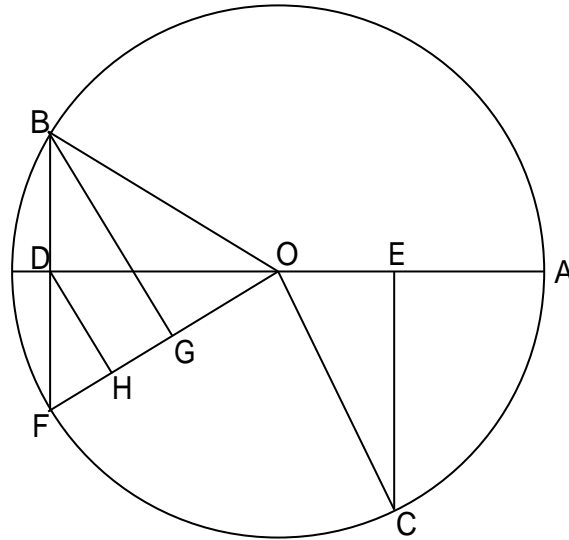
(証明終わり)

[ 命題 4 ]

点Oを中心とし、半径が1の円周上に3点A、B、Cがあるとす。点B、Cから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれD、Eとする。Dが線分OAのOの側の延長上にありEが線分OA上にあって、 $OE = 2OD^2 - 1$ が成り立つとき、

優角  $\angle AOC = 2\angle AOB$  すなわち  $\angle DOC + 180^\circ = 2\angle AOB$  が成り立つ。

# 転載不可\_赤門会



(証明)

直線 OA に関して点 B と対称な点を F とする。直線 OF に点 B、D から下ろした垂線の足をそれぞれ G、H とする。点 B が円 O の周上にあることと点 F の取り方より、

$$OB = OF = 1 \quad \dots(a.4.1)$$

$$BD = FD \quad \dots(a.4.2)$$

$$\angle DOB = \angle DOF \quad \dots(a.4.3)$$

点 G、点 H の取り方より、

$$\angle BGO = 90^\circ \quad \dots(a.4.4)$$

$$\angle DHO = 90^\circ \quad \dots(a.4.5)$$

(a.4.4)(a.4.5)より

$$BG \parallel DH \quad \dots(a.4.6)$$

(a.4.2)(a.4.6)より

$$GH = HF \quad \dots(a.4.7)$$

点 D の取り方より

$$\angle BDO = 90^\circ \quad \dots(a.4.8)$$

(a.4.5)(a.4.8)より

$$\angle DHO = \angle BDO \quad \dots(a.4.9)$$

(a.4.3)より

$$\angle DOB = \angle HOD \quad \dots(a.4.10)$$

(a.4.9)(a.4.10)より

$$\triangle DOB \cong \triangle HOD \quad \dots(a.4.11)$$

(a.4.11)より

$$OB : OD = OD : OH \quad \dots(a.4.12)$$

(a.4.12)より

$$OD^2 = OB \cdot OH \quad \dots(a.4.13)$$

(a.4.1)(a.4.13)より

転載不可\_赤門会

# 転載不可\_\_赤門会

$$OH = OD^2 \quad \dots(a.4.14)$$

O、G、H、Fの位置関係により

$$GH = OH - OG \quad \dots(a.4.15)$$

$$FH = OF - OH \quad \dots(a.4.16)$$

(a.4.7)(a.4.15)(a.4.16)より

$$OH - OG = OF - OH \quad \dots(a.4.17)$$

(a.4.17)より

$$OG = 2OH - OF \quad \dots(a.4.18)$$

(a.4.1)(a.4.14)(a.4.18)より

$$OG = 2OD^2 - 1 \quad \dots(a.4.19)$$

仮定より

$$OE = 2OD^2 - 1 \quad \dots(a.4.20)$$

(a.4.19)(a.4.20)より

$$OG = OE \quad \dots(a.4.21)$$

点Cは円Oの周上にあるから、

$$OC = 1 \quad \dots(a.4.22)$$

(a.4.1)(a.4.22)より

$$OB = OC \quad \dots(a.4.23)$$

点Eの取り方により

$$\angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.4.24)$$

(a.4.4)(a.4.24)より

$$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \dots(a.4.25)$$

(a.4.21)(a.4.23)(a.4.25)より

$$BGO \quad CEO \quad \dots(a.4.26)$$

(a.4.26)より

$$\angle GOB = \angle EOC \quad \dots(a.4.27)$$

(a.4.3)より

$$\angle GOB = 2\angle DOB \quad \dots(a.4.28)$$

(a.4.27)(a.4.28)より

$$\angle EOC = 2\angle DOB \quad \dots(a.4.29)$$

A、O、Dはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle EOC = 180^\circ - \angle DOC \quad \dots(a.4.30)$$

$$\angle DOB = 180^\circ - \angle AOB \quad \dots(a.4.31)$$

(a.4.29)(a.4.30)(a.4.31)より

$$180^\circ - \angle DOC = 2(180^\circ - \angle AOB) \quad \dots(a.4.32)$$

(a.4.32)より

$$\angle DOC + 180^\circ = 2\angle AOB$$

(証明終わり)

転載不可\_\_赤門会