インデックスに戻る

１．方程式と不等式

１－３．方程式と不等式

１－３－Ａ．絶対値と方程式・不等式

１－３－Ａ－Ｂ．絶対値と不等式

左辺または右辺（あるいは両方）に絶対値記号が含まれる不等式を考えることができる。

（例）　$3|x-1|<-x+5$　は x の不等式である。$x=1$ は解であり、$x=3$ は解ではない。

このような方程式には、一次不等式や二次不等式の場合とは違い、機械的な解法がない。適当な条件のもとでは、絶対値記号を含む式を絶対値記号を含まない式に書き換えることができる。

（例）　$x\geq 1$ のときは $x-1\geq 0$ であるから、$|x-1|=x-1$

$x<1$ のときは $x-1<0$ であるから、$|x-1|=-(x-1)$

このことを利用して、絶対値記号が含まれる不等式を絶対値記号が含まれない不等式に帰着させることができる。一次不等式や二次不等式などの解法が明らかな不等式に帰着させることができれば、解くことが可能になる。

（例）　$3|x-1|<-x+5$　…①

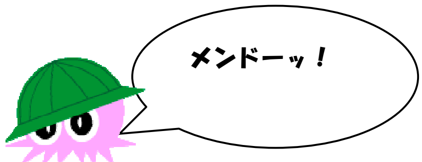
$x\geq 1$ の場合、$|x-1|=x-1$ であるから、①より

$3(x-1)<-x+5$　（←これは x の一次不等式である。）

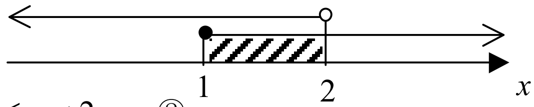
$3x-3<-x+5$

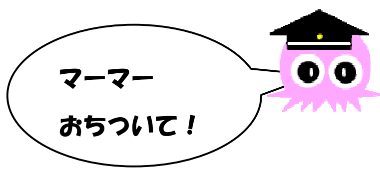
$4x<8$

$x<2$



これと $x\geq 1$ より





$1\leq x<2$　…②

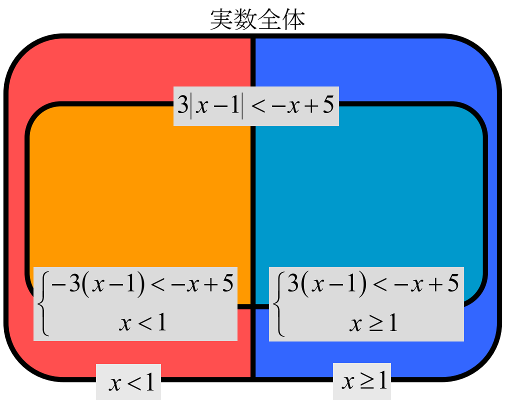
$x<1$ の場合、$|x-1|=-(x-1)$ であるから、①より

$-3(x-1)<-x+5$　（←これは x の一次不等式である。）

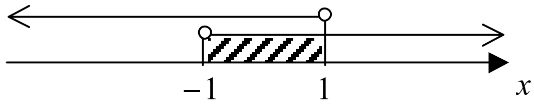
$-3x+3<-x+5$

$-2x<2$

$x>-1$

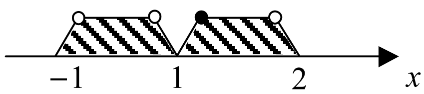


これと $x<1$ より



$-1<x<1$　…③

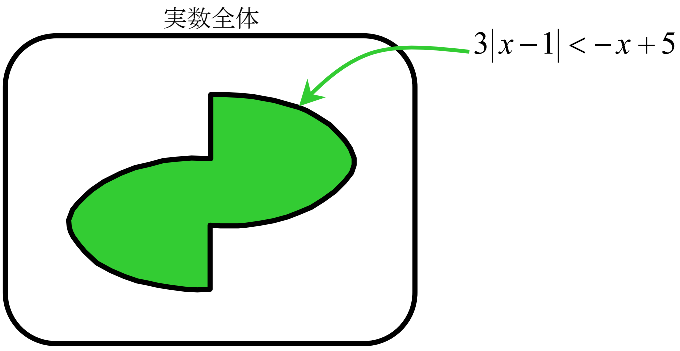
②③より、①の解は



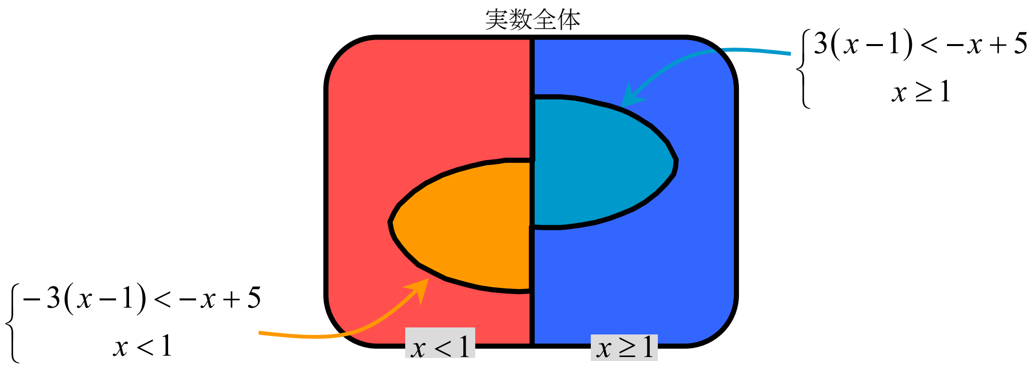
$-1<x<2$

（注）

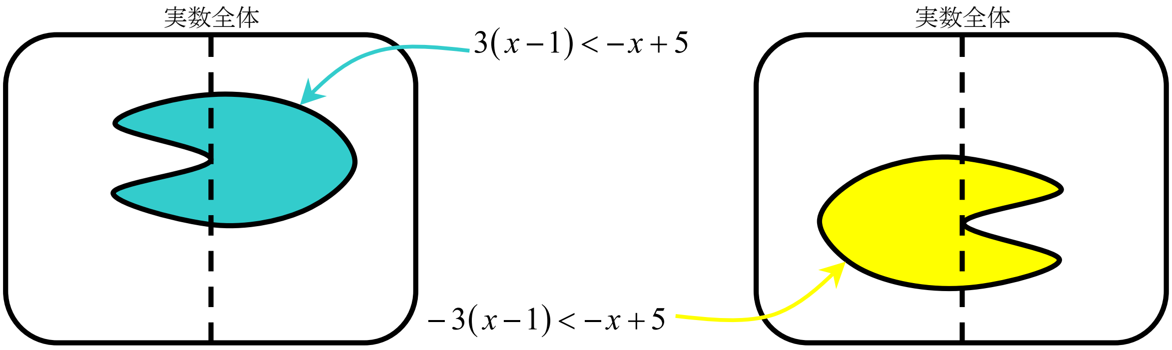
この例について、もう少し詳しく見てみましょう。$3|x-1|<-x+5$ の解を下のような図で表してみます。

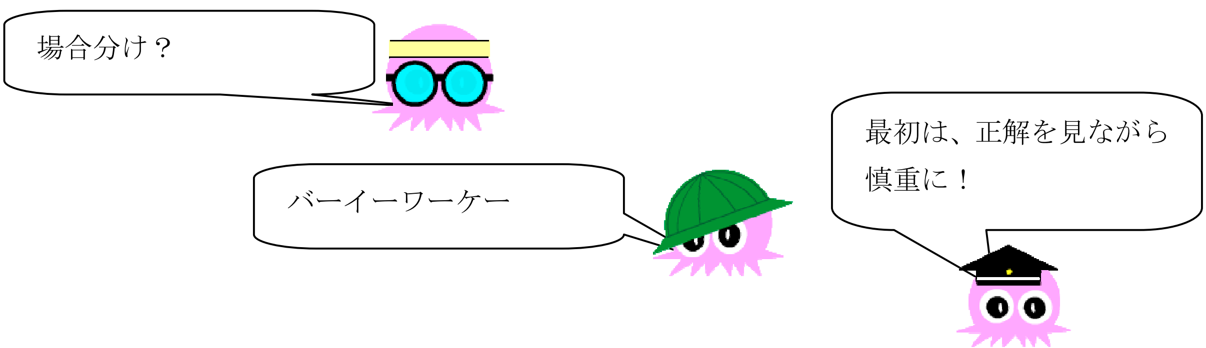


絶対値がついたままでは解けないので、$x \geq 1$ の場合と $x<1$ の場合に分けます。



それぞれの場合に現れた不等式 $3(x-1)<-x+5$、$-3(x-1)<-x+5$ を解きます。

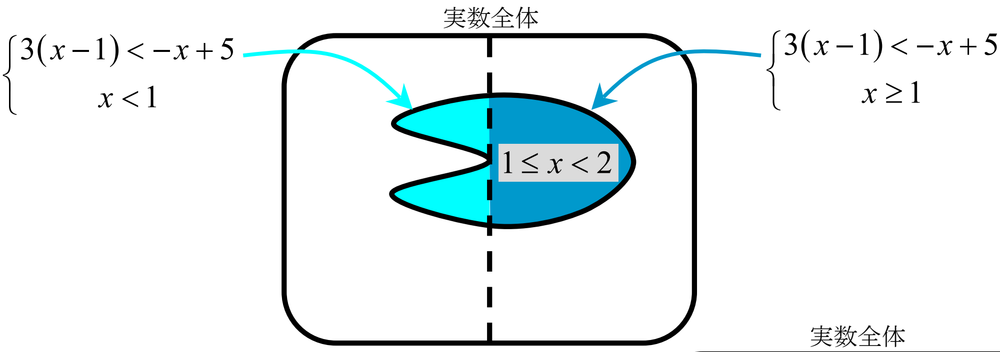


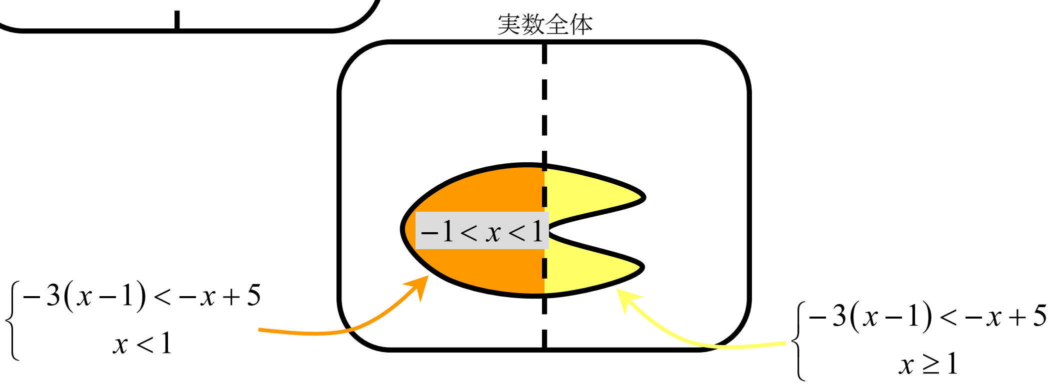


場合わけしたそれぞれについて、考えなければならないのは、

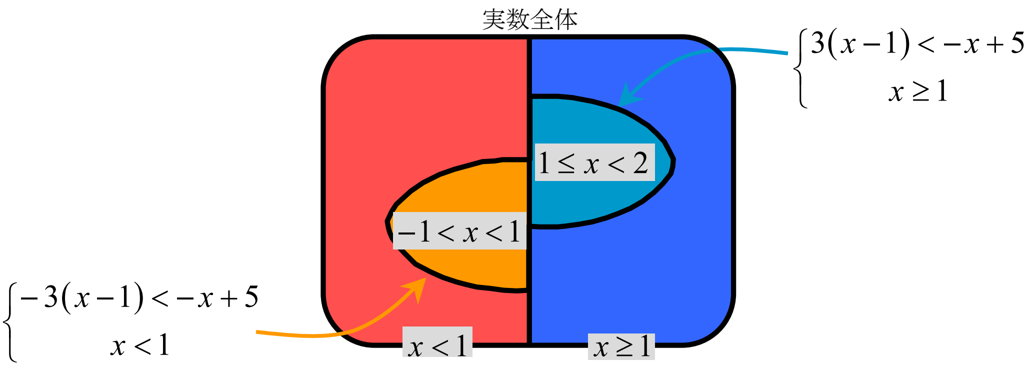
$$\begin{cases} 3(x-1)<-x+5 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} -3(x-1)<-x+5 \\ x<1 \end{cases}$$

でした。二つの不等式$3(x-1)<-x+5$および$-3(x-1)<-x+5$の解の範囲について、場合わけの条件を満たしているものを拾い、場合わけの条件を満たしていないものは捨てます。



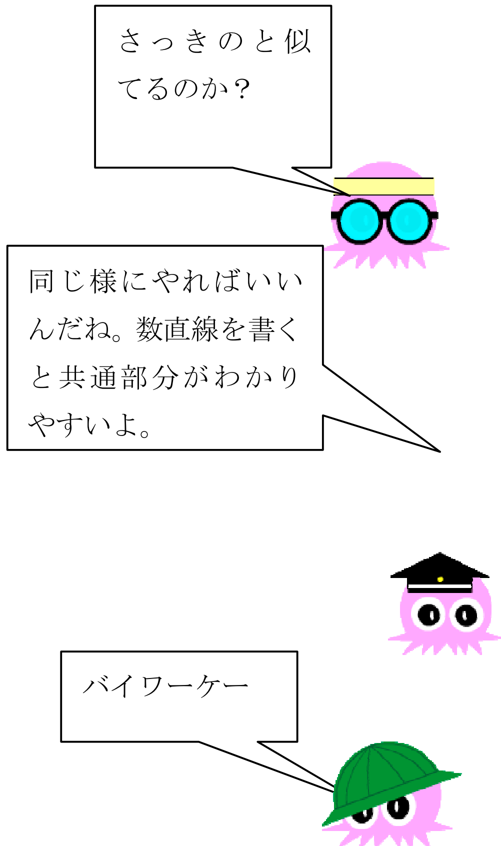


拾い上げたものをすべてあわせたものが解です。



（以下には、「二次不等式」の内容が含まれます。）
次の例では、絶対値をはずすことによって、二次不等式に帰着されることになる。前の例と同様にして解くことができるが、二次不等式では解が複雑になったり、解がない・すべての数が解などの場合があるので、注意が必要である。

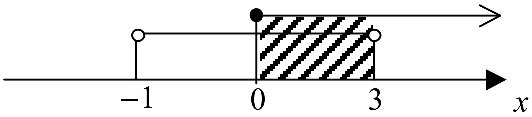
（例）　$x^2-3<2|x|$　…①　（図１）



$x \geq 0$ の場合、$|x|=x$ であるから、

$$x^2-3<2x$$
$$x^2-2x-3<0$$
$$(x-3)(x+1)<0$$
$$-1<x<3$$

これと $x \geq 0$ より

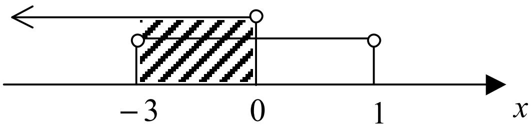


$0 \leq x < 3$　…②（図２）

$x<0$ の場合、$|x|=-x$ であるから、

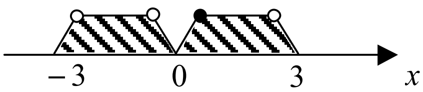
$$x^2-3<2(-x)$$
$$x^2+2x-3<0$$
$$(x+3)(x-1)<0$$
$$-3<x<1$$

これと $x<0$ より



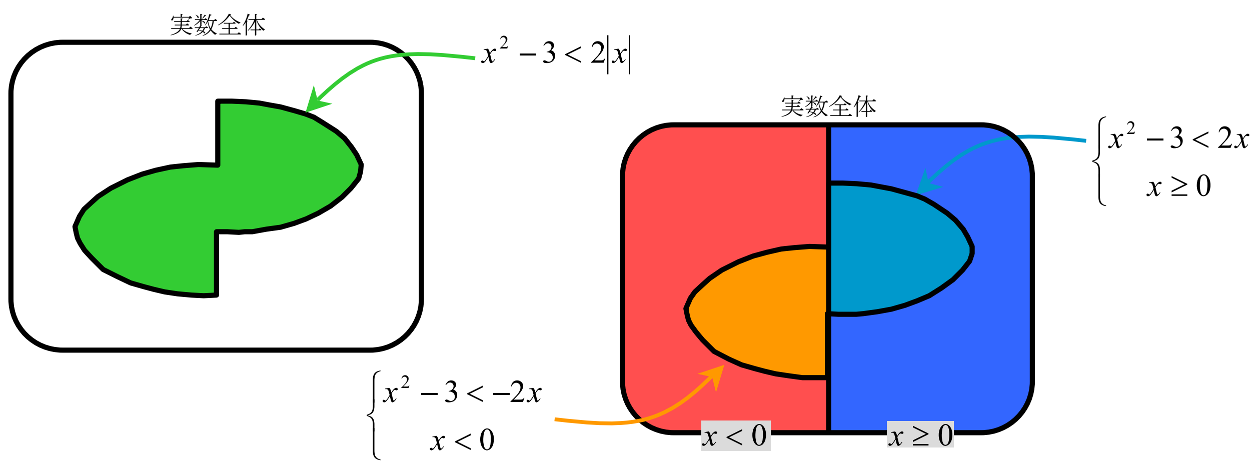
$-3<x<0$　…③（図３）

②③より①の解は、

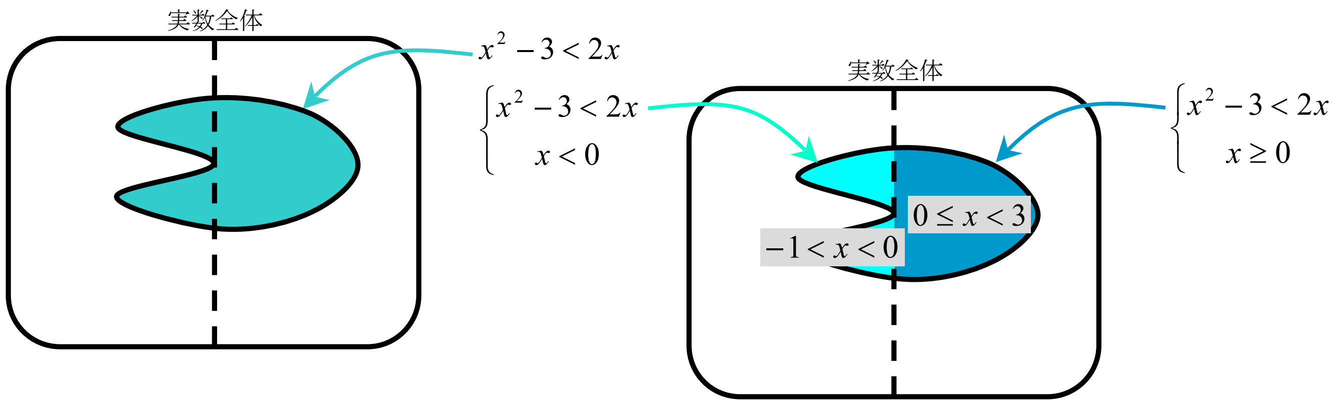


$-3<x<3$　（図４）

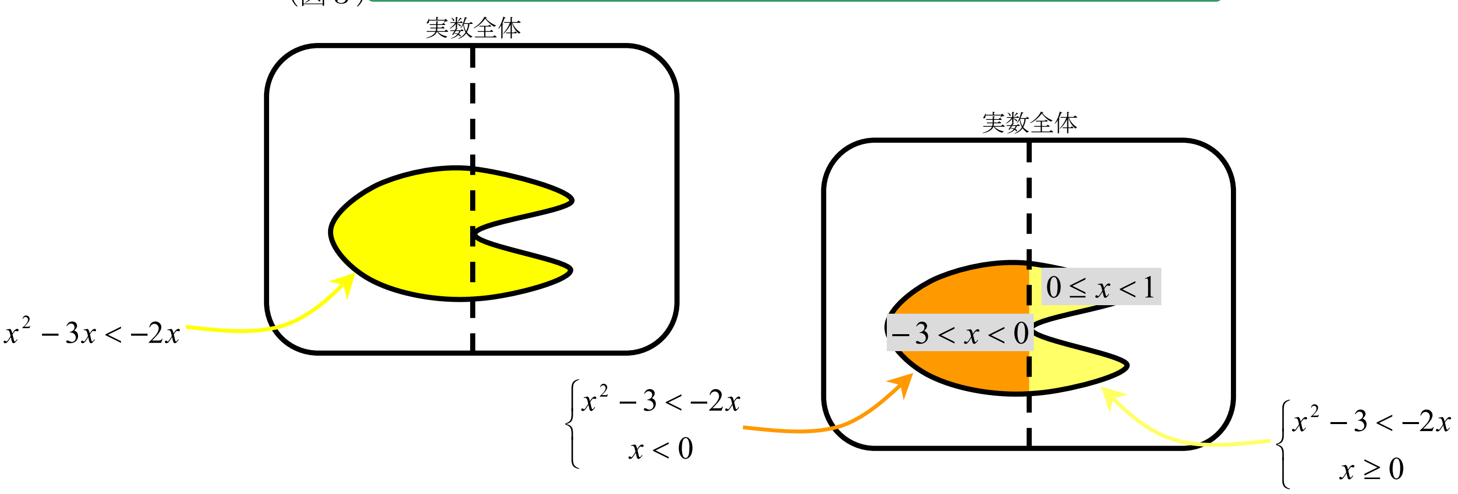
（図１）


実数全体
$x^2-3<2|x|$
実数全体
$\begin{cases} x^2-3<2x \\ x \ge 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2-3<-2x \\ x<0 \end{cases}$
$x<0$
$x \ge 0$

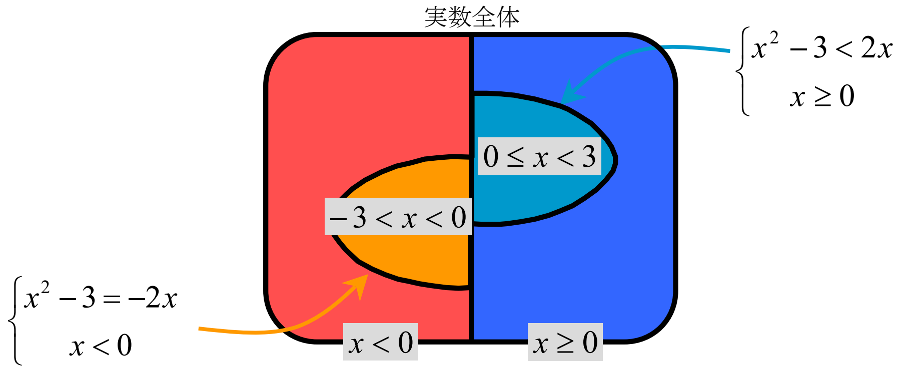
（図２）


実数全体
$x^2-3<2x$
$\begin{cases} x^2-3<2x \\ x<0 \end{cases}$
実数全体
$\begin{cases} x^2-3<2x \\ x \ge 0 \end{cases}$
$0 \le x<3$
$-1<x<0$

（図３）


実数全体
$x^2-3x<-2x$
実数全体
$0 \le x<1$
$-3<x<0$
$\begin{cases} x^2-3<-2x \\ x<0 \end{cases}$
$\begin{cases} x^2-3<-2x \\ x \ge 0 \end{cases}$

（図４）



特殊な形の不等式については、その解がどうなるかを覚えておくと便利である。

（定理）

cは正の定数とする。このとき、実数tに関して

$$|t|<c \quad \Leftrightarrow \quad -c<t<c$$

$$|t|>c \quad \Leftrightarrow \quad t<-c、\ c<t$$

（例）

不等式$|x|>3$の解は$x<-3$、$3<x$である。

（例）

不等式$|x-1|<5$を解くと、次のようになる。

$|x-1|<5$

$-5<x-1<5$

$-4<x<6$

したがって、この不等式の解は、$-4<x<6$

絶対値を二つ以上含む不等式でも、適当な範囲に分けることにより、解くことができる場合がある。

（例）　$|x-1|+|x-2|<3$　$\cdots$★

$x \geq 2$ のとき、$x>1$ であるから、

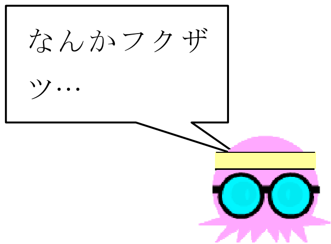
$|x-1|=x-1$、$|x-2|=x-2$

したがって、★より、

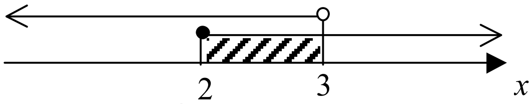
$(x-2)+(x-1)<3$

$2x<6$

$x<3$



これと $x \geq 2$ より

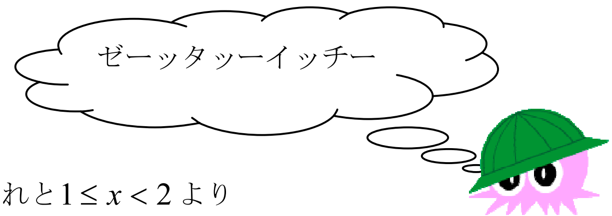


$2 \leq x < 3$　$\cdots$①

$1 \leq x < 2$ のとき、

$|x-1|=x-1$、$|x-2|=-(x-2)$

したがって、★より



$(x-1)-(x-2)<3$

$0 \cdot x-2<0$

これは任意の実数 x について成り立つ。これと $1 \leq x < 2$ より

$1 \leq x < 2$　$\cdots$②

$x<1$ のとき、

$|x-1|=-(x-1)$、$|x-2|=-(x-2)$

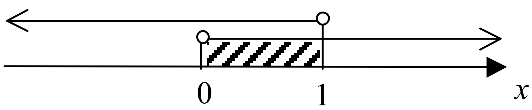
したがって、★より

$-(x-1)-(x-2)<3$

$-2x<0$

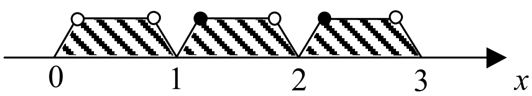
$x>0$

これと $x<1$ より

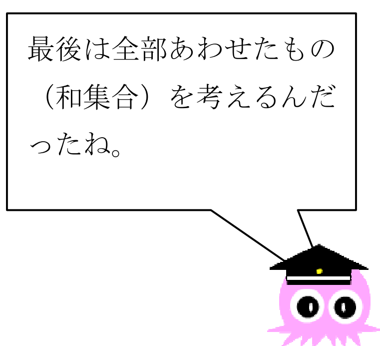


$0<x<1$　$\cdots$③

①②③より、★の解は、



$0<x<3$



(例)　$||x|-2|<1$　…★

・$x \geq 0$ のとき、

$|x| = x$

であるから、★より、

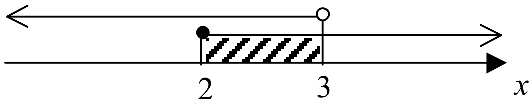
$|x-2|<1$　…①

「$x \geq 0$　かつ　$x \geq 2$」、すなわち、$x \geq 2$ のとき、$|x-2| = x-2$ であるから、①より

$x-2<1$

$x<3$

これと $x \geq 2$ より



$2 \leq x < 3$　…②

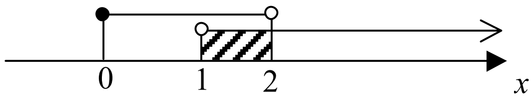
「$x \geq 0$　かつ　$x < 2$」、すなわち、$0 \leq x < 2$ のとき、$|x-2| = -(x-2)$ であるから、①より

$-(x-2)<1$

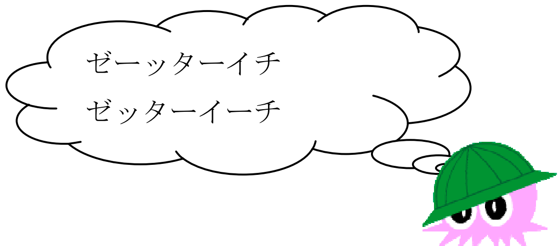
$-x<-1$

$x>1$

これと $0 \leq x < 2$ より



$1 < x < 2$　…③



・$x < 0$ のとき

$|x| = -x$

であるから、★より

$|-x-2|<1$

$|-(x+2)|<1$

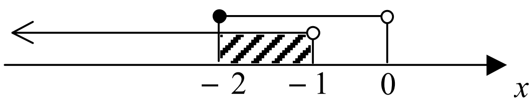
$|x+2|<1$　…④

「$x < 0$　かつ　$x \geq -2$」、すなわち、$-2 \leq x < 0$ のとき、$|x+2| = x+2$ であるから、④より

$x+2<1$

$x<-1$

これと $-2 \leq x < 0$ より



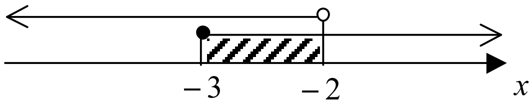
$-2 \leq x < -1$　…⑤

(次のページへ続く)

「$x<0$　かつ　$x<-2$」、すなわち、$x<-2$ のとき、$|x+2|=-(x+2)$ であるから、④より

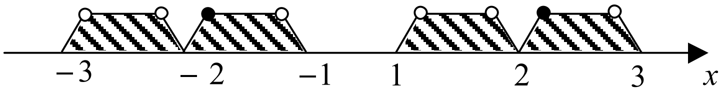
$$-(x+2)<1$$
$$-x<3$$
$$x>-3$$

これと $x<-2$ より



$-3<x<-2$　…⑥

②③⑤⑥より、★の解は、

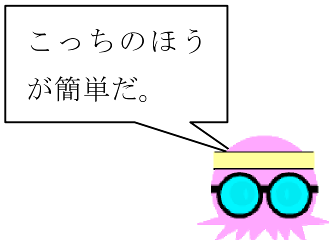


$-3<x<-1$、$1<x<3$

（注）

この問題を次のように解いてもよいが、すべての問題が以下のように解けるわけではない。

$$\left||x|-2\right|<1$$
$$-1<|x|-2<1$$
$$1<|x|<3$$
$$-3<x<-1、1<x<3$$



インデックスに戻る